

현장연구보고서

결 재	담 당	팀 장	처 장	총 장

캠퍼스/전공	한국천문연구원/천문우주과학	학위과정	박사과정
학 번	01512047	재학학기	2
현장구분	☒ 지도교수 ☐ 타연구실 ☐ 외부업체	성 명	유재원
과 목 명	우주거대구조 자료처리		
기간/시간	2016년 2월 18일~ 2016년 6월 2일 / 16시간	장 소	한국천문연구원

※ 상기 결재 란은 접수를 위한 용도로 공란으로 둡니다.

※ 현장연구에 대한 성과를 요약하여 적으시오.

결과보고서 요약

올해는 아인슈타인의 일반상대성이론이 탄생한 지 100년째 되는 해이다. 그동안 일반상대론은 그 수학적 아름다움(물리학에서는 비교적 간단한 아이디어와 공식으로 자연현상을 예외 없이 기술할 수 있을 때 그 이론이 '아름답다'고 표현한다.)과 인공위성에서의 시간지연 등 정확성이 재차 확인되어 입지를 견고히 다지고 있었다. 이렇게 완벽해 보이는 상대성이론이지만, 일부 과학자들 사이에서는 이 상대성이론을 수정, 보완하려는 움직임이 일고 있다. ' 과연 상대성이론이 물리역사상 최종 이론일까? 이 자체로 자연을 완벽히 기술하고 있으니, 만족하고 안주할 것인가? 우리의 물리에 더 이상의 발전은 없는 것인가? ' 와 같은 의구심이 든 것이다. 더욱이, 1998년에 Riess 그룹과 Perlmutter 그룹이 거의 동시에 우주의 팽창이 가속되고 있음을 관측하면서 중력이론을 수정해야한다는 의견에 힘이 실리고 있다. 상대성이론으로는 이 가속팽창을 일으키는 Dark Energy의 정체를 설명하기가 어려웠던 것이다.

중력이론을 수정한다는 것은 무엇을 의미하는가? 일반상대론을 기술하는 아인슈타인 장방정식

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

은 시공간의 곡률($G_{\mu\nu}$)과 물질($T_{\mu\nu}$)간의 관계를 설명하고 있다. 이 공식이 의미하는 바를 잘 표현한 문장으로 '물질은 시공간이 어떻게 휘지를 말해주고, 시공간은 물질이 어떻게 움직일지를 말해준다.' 가 있다. 여기서 물질의 존재에 따라 '시공간이 어떻게 휘지'에 해당하는 좌항($G_{\mu\nu}$)을 수정하면 수정중력이론이 되는 것이다.

이는 '물질이 어떻게 움직일 것인가'를 표현하는 운동방정식 수립에 필요한 작용

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} R + L_M \right] \sqrt{-g} d^4x$$

으로 이어진다. 아인슈타인방정식에서 $G_{\mu\nu}$ 를 수정하면 작용에서는 $\frac{1}{16\pi G}R$ (아인슈타인-힐버트 항)의 수정으로 나타나게 되는 것이다.

그렇다면 어떻게 중력이론을 수정할 것인가? 여러 가지 아이디어가 있겠지만, 우리는 일반상대론을 한층 더 일반화한 이론인 Brans-Dicke theory를 살펴보기로 한다. 새로운 개념을 도입하여 덧붙이는 것 보다는 기존 개념을 일반화 하는 것이 보편적인 근본원리를 추구하는 물리의 철학에 더 부합하기 때문이다.

앞서 소개한 아인슈타인 장방정식($G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$)에서 $G_{\mu\nu}$ 와 $T_{\mu\nu}$ 는 비례관계로, 비례상수 $8\pi G$ 를 갖는다. 즉, 같은 물질이라면 시공간을 휘게 하는 정도가 언제 어디서든 일정하다는 것이다. Brans와 Dicke는 이것을 의심하였고, 중력상수 G 를 상수가 아닌 스칼라장에 관계된 변수로 정의하였다. 중력상수 G 가 특정 값에 고정되어있는 것이 아니라, 주변의 물리량에 의해 결정되는 변수라는 점에서 Brans-Dicke theory가 일반상대론보다 더욱 일반화 된 이론이라고 말할 수 있다.

이제 우리가 알아보아야 할 것은 ‘어떻게 G 가 결정 되는가?’ 이다. 이는 Brans-Dicke theory의 기본모토인 마하의 원리(Mach's principle)로 거슬러 올라간다. Ernst Mach가 1872년에 제창한 마하의 원리는 ‘한 물체의 관성은 그 물체를 둘러싼 전체 우주의 나머지 모든 물질들에 의해 결정된다.’는 이론으로, 관성이 물질의 고유한 성질이고 관성의 법칙이 성립하는 절대공간이 존재한다는 뉴턴의 주장과 상반되는 내용이다. 마하의 원리는 아인슈타인이 상대성이론을 만드는 동기가 되었으나, 위의 중력상수 G 의 예와 같이 상대성이론이 마하의 원리를 완전히 표방하고 있지는 못하다는 지적이 있다.

추상적인 아이디어인 마하의 원리를 중력을 기술하는 수식으로 표현하는 데에는 Brans와 Dicke 이전에 Sciama의 공헌이 있었다. 그는 마하의 원리를 토대로 중력을 전자기학에 빗대어 표현하였다. 어떤 테스트입자의 관성은 나머지 모든 물질과의 상호작용에 의해 결정되므로 우주에 존재하는 물질의 양과 분포의 함수로 표현될 수 있을 것이다. 이 관성을 전자기학의 전하처럼 ‘시공간의 점마다 부여되는 상수 값, 즉 스칼라장’으로 표현하면 다음과 같다.

$$\phi = - \int_V \frac{\rho}{r} dV$$

위의 식은 밀도가 ρ 이고 r 의 거리만큼 떨어진 곳의 물질과의 상호작용(ρ 에 비례하고 r 에 반비례하는)을 전 우주의 부피 V 로 적분해주어 마하의 원리를 충실히 표현하고 있다.

전하가 움직이면 전류가 되듯이, 테스트입자가 속도를 가질 경우 그에 해당하는 벡터장 $A = \frac{\phi}{c}v(t)$ 을 갖는다. 마찬가지로 전자기학의 전기장, 자기장에 해당하는 Gravito-electric field ($E = -\frac{\phi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$), Gravito-magnetic field ($H = \text{curl}A = 0$) 개념을 도입할 수 있다.

여기에 추가로, 질량이 M 인 다른 물체가 근처에 있는 상황을 생각해 보자. 거리 r 만큼 떨어

져있는 이 물체로 인한 스칼라장은 $\phi' = -\frac{M}{r}$ 으로, 그로 인한 Gravito-electric field는 $E' = -\nabla\phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A'}{\partial t} = -\frac{M}{r^2} - \frac{\phi'}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$ 으로 나타낼 수 있을 것이다. 이 Gravito-electric field E' 가 우주전체에 ρ 의 밀도로 퍼져있는 다른 모든 물질로 인한 Gravito-electric field $E = -\frac{\phi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$ (여기서는 밀도 ρ 가 균질하므로 ϕ 의 변화량을 뜻하는 $-\nabla\phi$ 항이 생략되었다.)와 평형을 이루어야 테스트입자가 안정된 상태를 유지할 것이므로 $E' = -E$, 즉 $-\frac{M}{r^2} - \frac{\phi'}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\phi}{c^2}\frac{\partial v}{\partial t}$ 이 성립하고, 스칼라장 관련항을 오른쪽으로 모아주면 다음의 식을 얻게 된다.

$$\frac{M}{r^2} = -\left(\frac{\phi + \phi'}{c^2}\right)\frac{\partial v}{\partial t}$$

양변을 $-\left(\frac{\phi + \phi'}{c^2}\right)$ 으로 나눠주고 테스트입자의 질량 m 을 곱해주면

$$-\left(\frac{c^2}{\phi + \phi'}\right)\frac{Mm}{r^2} = m\frac{\partial v}{\partial t} = ma$$

이 되는데, 이 식을 뉴턴중력 $F = G\frac{Mm}{r^2}$ 과 비교하면 $-\left(\frac{c^2}{\phi + \phi'}\right)$ 이 중력상수 G 의 역할을 한다는 것을 볼 수 있다. 물체 M 으로 인한 스칼라장 ϕ' 은 우주전체물질로 인한 스칼라장 ϕ 에 비하면 미미할 것이므로 ($\phi' \ll \phi$), 우리는 드디어 다음의 관계식을 얻게 된다.

$$G \sim \frac{1}{\phi}$$

결국, 중력상수 G 는 마하의 원리에 의하여 스칼라장에 관계된 변수로 일반화 된 것이다.

그런데 우리는 Sciama의 스칼라장 표현에서 몇 가지 문제점을 발견한다.

$$\phi = -\int_V \frac{\rho}{r} dV = -\int_0^{c\tau} \frac{\rho}{r} 4\pi r^2 dr = -2\pi\rho c^2 \tau^2$$

위의 식 전개에서 부피적분의 범위를 $[0, c\tau]$ 로 놓고 있는데, $c\tau$ 는 허블팽창 $v = r/\tau$ ($v =$ 거리 r 에 있는 물질의 속도, $\tau = \text{constant}$)만을 고려하고 있다. 우주전체공간에 대한 상호작용을 적분해야 하는데, 정보가 전달되는 시간이 고려되지 않아 바로 옆에 있는 물질도, 아주 먼 거리에 있는 물질도 동시에 즉각적으로 테스트입자와 상호작용하는 것처럼 보이는 것이다.

또한, 위의 식에서는 균질하고 등방한 밀도 ρ 를 전제로 하고 있는데 현시점으로는 균질한 ρ 를 가정할 수 있겠으나, 실제 우리에게 영향을 미치는 먼 거리의 물질은 해당 중력이 빛의 속도로 그 거리를 달려온 시간만큼 과거의 물질로 봐야할 것이다. 우주의 팽창역사로 볼 때 Matter Dominant 기간에는 $\rho \propto a^{-3}$, 그보다 더 과거인 Radiation Dominant 기간에는 $\rho \propto a^{-4}$ 이므로 가까이 있는 ρ 는 a^{-3} 로, 멀리 있는 ρ 는 a^{-4} 로 행동하여 더 이상 ρ 가 전체우주공간(우리에게 영향을 끼칠 수 있는 범위)에서 균질하다고 볼 수 없다.

따라서 우리는 ϕ 를 표현할 때, 먼 거리의 물질의 중력이 우리에게 달려온 시간을 고려하여 $c\tau$

(Hubble horizon)이 아닌 'causally connected' 되어있는 Particle horizon $= a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$ 를 적분구간으로 놓아야할 것이다. 또한 우주의 팽창역사를 담을 수 있도록 ρ 를 scale factor a 의 함수로 표현해 주어야 할 것이다. 이를 적용하면 ϕ 는 다음과 같이 표현 된다.

$$\phi = 4\pi \int_0^1 \rho(a') \chi(a') H(a')^{-1} da'$$

이와 같이 본 현장연구에서는 수정중력이론의 배경 및 의미의 이해, Brans-Dicke theory의 리뷰 및 보완 가능성 탐색이 수행되었다. 이어지는 현장연구에서는 더 나아가, 전체 Brans-Dicke theory 방정식에 causality 문제 적용, 우주거대구조자료를 이용한 Brans-Dicke theory의 검증이 수행될 예정이다.

위와 같이 현장연구 보고서를 승인합니다.

2016년 6월 3일

담당교수 : 송용선

지도교수 : 송용선

(인)
(인)

과학기술연합대학원대학교 총장 귀하

[APPENDIX A] Brans-Dicke theory Formula (Review of Brans-Dicke paper 1961)

The gravitational constant G is related to the mass distribution in a uniform expanding universe.

$$GM/Rc^2 \sim 1 \quad (A.1)$$

The action principle in Brans-Dicke theory;

$$0 = \int \int [\phi R + (16\pi G/c^4) L - w(\phi_{,i} \phi^{,i} / \phi)] (-g)^{1/2} d^4x \quad (A.2)$$

The energy-momentum tensor of matter must have a vanishing covariant divergence;

$$T^{\bar{i}\bar{j}}_{;\bar{j}} = 0 \quad (A.3)$$

$$T^{\bar{i}\bar{j}} = [2/(-g)^{1/2}] (\partial/\partial g_{\bar{i}\bar{j}}) [(-g)^{1/2} L] \quad (A.4)$$

The wave equation for ϕ is obtained by varying ϕ and $\phi_{,i}$ in equation (A.2);

$$\text{Bracket } [] \text{ in (A.2)} = \mathcal{L} = [\phi R + \frac{16\pi}{c^4} L - w(\phi_{,i} \phi^{,i} / \phi)] \sqrt{-g}$$

Using Euler-Lagrange equation, $\partial_i (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = [R + w(\phi_{,i} \phi^{,i} / \phi^2)] \sqrt{-g}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}} &= \frac{-w\sqrt{-g}}{\phi} \frac{\partial}{\partial \phi_{,i}} (\phi_{,j} \phi^{,j}) \quad \frac{\partial}{\partial x_m} x_\nu = \delta^m_\nu \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi_{,i}} (g^{mn} \phi_{,m} \phi_{,n}) = g^{mn} \delta^i_m \phi_{,n} + g^{mn} \phi_{,m} \delta^i_n \\ &= g^{in} \phi_{,n} + g^{mi} \phi_{,m} = 2g^{in} \phi_{,n} \\ &= -\frac{2w\sqrt{-g}}{\phi} g^{in} \phi_{,n} \end{aligned}$$

$$\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-2\omega \sqrt{-g} \underbrace{g^{in} \phi_{,n}}_{=\phi'^i} / \phi \right)$$

$$= -2\omega \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \phi'^i)}_{\equiv \sqrt{-g} \square \phi} / \phi + \sqrt{-g} \phi'^i \underbrace{\frac{\partial \phi^{-1}}{\partial x^i}}_{\equiv \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -\phi^{-2} \phi_{,i}} \right]$$

$$= -2\omega \left[\sqrt{-g} \square \phi / \phi + \sqrt{-g} \phi'^i \cdot (-\phi^{-2} \phi_{,i}) \right]$$

$$= \frac{-2\omega \sqrt{-g}}{\phi} \square \phi + \frac{2\omega \sqrt{-g}}{\phi^2} \phi'^i \phi_{,i}$$

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{-2\omega \sqrt{-g}}{\phi} \square \phi + \frac{2\omega \sqrt{-g}}{\phi^2} \phi'^i \phi_{,i} - \sqrt{-g} R - \omega \sqrt{-g} \left(\frac{\phi_{,i} \phi'^i}{\phi^2} \right) \\ &= \frac{-2\omega \sqrt{-g}}{\phi} \square \phi - \sqrt{-g} R + \frac{2\omega \sqrt{-g}}{\phi^2} \phi'^i \phi_{,i} \end{aligned}$$

Dividing by $-\sqrt{-g}$;

$$2\omega \phi^{-1} \square \phi - (\omega / \phi^2) \phi'^i \phi_{,i} + R = 0 \quad (A.5)$$

$$\square \phi = \phi'^i_{;i} = (-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} \phi'^i]_{,i} \quad (A.6)$$

To obtain the field equation for the Brans-Dicke theory, we vary the Brans-Dicke action (A.2) with respect to metric $g^{\mu\nu}$. In order to use previous calculation (APPENDIX A-1: Derivation of Einstein equation), we rewrite the action (A.2) as follows:

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{w}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] + \mathcal{S}_m \quad (A.7)$$

We vary the action in the same way as done in APPENDIX A-1, the difference occurs at the variation of Ricci scalar.

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \underbrace{\nabla_\delta (g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\delta_{\mu\nu} - g^{\mu\delta} \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu})}_{(A-1.13)} \quad (A-1.13)$$

In GR, the second term is zero due to Stokes's theorem, but in Brans-Dicke action it is non-zero, because of ϕ which is multiplied in Einstein-Hilbert term.

Thus,

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} \quad (A-1.14)$$

is no longer valid.

So we have to calculate $(\boxed{g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\delta_{\mu\nu}} - \boxed{g^{\mu\delta} \delta \Gamma^\rho_{\rho\mu}})$.

Let's start from the variation of the Christoffel symbol, $\delta \Gamma^\delta_{\mu\nu}$.

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (A.8)$$

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu \delta g_{\rho\nu} + \partial_\nu \delta g_{\rho\mu} - \partial_\rho \delta g_{\mu\nu}) \quad (A.9)$$

We express the partial derivatives in the second term, in terms of covariant derivatives.

$$\nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} = \underbrace{\partial_\mu \delta g_{\rho\nu}}_{(A.10)} - \Gamma^\delta_{\mu\rho} \delta g_{\delta\nu} - \Gamma^\delta_{\mu\nu} \delta g_{\rho\delta}$$

$$\Rightarrow \underline{\partial_\mu \delta g_{\rho\nu}} = \nabla_\mu \delta g_{\rho\nu} + \Gamma^\delta_{\mu\rho} \delta g_{\delta\nu} + \Gamma^\delta_{\mu\nu} \delta g_{\rho\delta}$$

We substitute this for the second term in (A.9), then

$$\begin{aligned}
 \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} + \cancel{\Gamma_{\mu\rho}^{\delta} \delta g_{\delta\nu}} + \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^{\delta} \delta g_{\rho\delta}} \\
 &\quad + \nabla_{\nu} \delta g_{\rho\mu} + \cancel{\Gamma_{\nu\rho}^{\delta} \delta g_{\delta\mu}} + \cancel{\Gamma_{\nu\mu}^{\delta} \delta g_{\rho\delta}} \\
 &\quad - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu} - \cancel{\Gamma_{\rho\mu}^{\delta} \delta g_{\delta\nu}} - \cancel{\Gamma_{\rho\nu}^{\delta} \delta g_{\mu\delta}}) \\
 &\quad \text{because of symmetry } \Gamma_{\rho\nu}^{\delta} = \Gamma_{\nu\rho}^{\delta} \\
 &= \frac{1}{2} \delta g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\rho\nu} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \\
 &\quad + g^{\lambda\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} \delta g_{\rho\delta} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu} \delta g_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) \\
 &\quad \underbrace{\delta g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} g_{\rho\alpha} g_{\delta\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}}_{= \delta^{\lambda}_{\alpha}} \quad \text{(because of } \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta} \text{)} \\
 &= \cancel{\delta g^{\lambda\beta} g_{\delta\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}} - \cancel{\delta g^{\alpha\beta} \delta^{\lambda}_{\alpha} g_{\delta\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu} \delta g_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu})
 \end{aligned}$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\rho\nu} + \nabla_{\nu} \delta g_{\rho\mu} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\nabla_{\mu} (-g_{\alpha\nu} g_{\lambda\rho} \delta g^{\alpha\lambda}) + \nabla_{\nu} (-g_{\alpha\mu} g_{\lambda\rho} \delta g^{\alpha\lambda}) - \nabla_{\rho} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \delta g^{\alpha\beta})] \\
 &= -\frac{1}{2} (g_{\nu\alpha} \nabla_{\mu} \delta g^{\alpha\lambda} + g_{\mu\alpha} \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\lambda} \delta g^{\alpha\beta}) \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

This implies

$$\begin{aligned}
 \boxed{g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha} \nabla_{\mu} \delta g^{\alpha\delta} + g_{\mu\alpha} \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\delta} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\delta} \delta g^{\alpha\beta}) \\
 &= -\frac{1}{2} \underbrace{\delta^{\mu}_{\alpha} \nabla_{\mu} \delta g^{\alpha\delta}}_{\nabla_{\alpha} \delta g^{\alpha\delta}} - \frac{1}{2} \underbrace{\delta^{\nu}_{\alpha} \nabla_{\nu} \delta g^{\alpha\delta}}_{\nabla_{\alpha} \delta g^{\alpha\delta}} + \frac{1}{2} \underbrace{\delta^{\nu}_{\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^{\delta} \delta g^{\alpha\beta}}_{g_{\alpha\beta} \nabla^{\delta} \delta g^{\alpha\beta}} \\
 &= -\nabla_{\alpha} \delta g^{\alpha\delta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^{\delta} \delta g^{\alpha\beta} \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{g^{\mu\beta} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}} &= -\frac{1}{2} g^{\mu\beta} \left(\underbrace{g_{\mu\alpha}}_{\delta g_{\alpha}^{\alpha}} \nabla_{\rho} \delta g^{\alpha\rho} + g_{\rho\alpha} \underbrace{\nabla_{\mu}}_{\delta g^{\mu\mu}} \delta g^{\alpha\rho} - g_{\rho\alpha} g_{\mu\beta} \underbrace{\nabla^{\rho}}_{\delta g^{\rho\rho}} \delta g^{\alpha\beta} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(\cancel{\nabla_{\rho} \delta g^{\rho\beta}} + g_{\rho\alpha} \nabla^{\rho} \delta g^{\alpha\rho} - \cancel{\nabla_{\alpha} \delta g^{\alpha\beta}} \right) \\
&\quad (\rho \rightarrow \beta) \\
&= -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha} \delta g^{\alpha\beta} \quad (A.14)
\end{aligned}$$

Thus we finally get

$$\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\delta} (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\delta} - g^{\mu\delta} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}) \\
&= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_{\delta} \left(-\nabla_{\alpha} \delta g^{\alpha\delta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^{\delta} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \nabla^{\alpha} \delta g^{\delta\beta} \right) \\
&= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \nabla^2 \delta g^{\mu\nu} \quad (A.15)
\end{aligned}$$

And from APPENDIX A-1.(16) we know,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (A-1, 16)$$

Then

$$\begin{aligned}
\delta S_{BD} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \right] \\
&\quad + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\cancel{\delta \phi R} + \phi \delta R - \cancel{\delta \left(\frac{\omega}{\phi} \right)} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \frac{\omega}{\phi} \delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \right] + \delta S_M \quad (A.16) \\
&\quad \text{(variation of } \phi \text{ w.r.t metric = 0) } \quad (w = \text{const})
\end{aligned}$$

(A.15), (A-1, 16)

$$\begin{aligned}
&\stackrel{!}{=} -\frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \phi \partial_{\beta} \phi \right] \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(\phi R_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi) - \frac{\omega}{\phi} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (A.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \left[-\frac{\sqrt{-g}}{32\pi} g_{\mu\nu} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \phi \partial_{\beta} \phi \right) + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left\{ (\phi R_{\mu\nu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi) - \frac{\omega}{\phi} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \right\} \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (A.18)
\end{aligned}$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow [\text{bracket}] = 0$$

We multiply $\left(\frac{16\pi}{\phi\sqrt{-g}}\right)$ to the bracket ;

$$0 = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} \frac{w}{\phi^2} g_{\mu\nu} \underbrace{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi}_{= \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi} + \left(\frac{16\pi}{\phi\sqrt{g}}\right) \frac{\int \mathcal{L}_M}{\int g^{\mu\nu}}$$

$$+ R_{\mu\nu} + \frac{-\nabla_\mu \nabla_\nu \phi + g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi}{\phi} - \frac{w}{\phi^2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{16\pi}{\phi\sqrt{g}} \frac{\int \mathcal{L}_M}{\int g^{\mu\nu}} + \frac{w}{\phi^2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right] + \frac{1}{\phi} \left[\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi \right] \quad (A.19)$$

Using $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}$,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{w}{\phi^2} \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right] + \frac{1}{\phi} \left[\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \nabla^2 \phi \right] \quad (A.20)$$

cf) The Brans - Dicke field equation in the original paper 1961 ;

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = (8\pi\phi^{-1}/c^4) T_{ij} + (w/\phi^2) (\phi_{,i} \phi_{,j} - \frac{1}{2} g_{ij} \phi_{,k} \phi^{,k}) + \phi^{-1} (\phi_{,i;i} - g_{ij} \square \phi)$$

where $\square \phi = \phi^{,i}_{;i} = (-g)^{-1/2} [(-g)^{1/2} \phi^{,i}]_{,i}$

[APPENDIX A-1]

Derivation of Einstein equation

We start from the action which is the sum of the Einstein-Hilbert term and a matter term. We use the metric signature $(-, +, +, +)$.

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (1)$$

According to the action principle, the variation of an action with respect to $g^{\mu\nu}$ is zero. For a function $J[f] = \int_a^b L[x, f(x), f'(x)] dx$, the functional (variational) derivative of J is $\delta J = \int_a^b \frac{\delta J}{\delta f(x)} \delta f(x) dx$:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{g^{\mu\nu}} S \\ &= \int \left[\frac{1}{16\pi G} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &= \int \left[\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (2)$$

As it is valid for any variation $\delta g^{\mu\nu}$, the square bracket has to vanish. Thus we obtain the following equation of motion

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -16\pi G \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3)$$

We define the right hand side of the equation as an energy momentum tensor $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4)$$

From this equation of motion we derive the Einstein's field equation. To do that we need to know what δR and $\delta\sqrt{-g}$ are. We start with the Riemann tensor in order to calculate δR .

The Riemann tensor is defined by

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\mu\delta}. \quad (5)$$

Then,

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \delta \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (6)$$

And the variation $\delta \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ is the difference of two connections, therefore it is itself a tensor. Thus its covariant derivative is given by

$$\nabla_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) = \partial_\mu (\delta \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \delta \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \delta \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} \delta \Gamma^\rho_{\nu\lambda}, \quad (7)$$

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) = \partial_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^\rho - \gamma_{\sigma\nu}^\lambda\delta\Gamma_{\mu\lambda}^\rho. \quad (8)$$

From this expression we can directly read off

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\rho). \quad (9)$$

Since the Ricci tensor is defined by $R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^\mu$, taking $\rho = \mu$ at (9), we will get

$$\delta R_{\sigma\nu} = \nabla_\mu(\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\mu) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\mu\sigma}^\mu). \quad (10)$$

Replacing in the first term $\sigma \rightarrow \mu$, in the second term $\mu \rightarrow \rho$,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (11)$$

The Ricci scalar is defined by $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, then

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho \end{aligned} \quad (12)$$

Replacing in the second term $\rho \rightarrow \sigma$, in the third term $\nu \rightarrow \sigma$,

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (13)$$

The second term of the right hand side is a total derivative, and thus, according to Stoke's theorem, it can be expressed as boundary term by integral. As we assume the variation of the metric $\delta g^{\mu\nu}$ vanishes at infinity, this term does not contribute to the variation of the action. Therefore, we get the following expression

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Now we consider $\delta\sqrt{-g}$. Since $\delta g = \delta\det(g_{\mu\nu})$, according to Jacobi's formula¹, it can be rewritten as $gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$. Then it follows

$$\delta\sqrt{-g} = \delta(-g)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-(\sqrt{-g})^2)g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}). \quad (15)$$

Since $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$ is unity, $\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = 0$, it follows that $g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ and

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}),$$

¹The Jacobi's formula is a rule for differentiating a determinant. If a matrix A is invertible for all t , then $\frac{d}{dt}\det A(t) = \det A(t)\text{tr}\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}. \quad (16)$$

The left hand side of the equation of motion (3) finally becomes $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ so that the equation of motion takes the form of Einstein's field equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (17)$$

[APPENDIX B] Derivation of Gravitational constant G

(Review of Sciama paper 1952)

Gravito-electric field is given by :

$$E = - \frac{\Phi}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \text{grad } \Phi \quad (B.1)$$

where Φ is (Brans-Dicke) scalar potential (field) of a test particle
 V is velocity of test particle.

Suppose a body of gravitational mass M at distance r and the potential of the body at the test-particle $\phi = -\frac{M}{r}$, then the field of this body in the rest-frame of the test particle is ;

$$- \frac{M}{r^2} \hat{r} - \frac{\phi}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (B.2)$$

and we define

$$\hat{r} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

The total field at the particle is zero if

$$- \frac{M}{r^2} - \frac{\phi}{c^2} \frac{dV}{dt} = \frac{\Phi}{c^2} \frac{dV}{dt}$$

so that

$$\frac{M}{r^2} = - \left(\frac{\Phi + \phi}{c^2} \right) \frac{dV}{dt} \quad (B.3)$$

Dividing both by $\left(- \frac{\Phi + \phi}{c^2} \right)$ and multiply testparticle mass m ;

$$- \left(\frac{c^2}{\Phi + \phi} \right) \frac{Mm}{r^2} = m \frac{dV}{dt} = ma$$

$\underbrace{\quad}_{\text{should be } G}$ combining Newtonian gravitation law.

$$\frac{\Phi + \phi}{c^2} = - \frac{1}{G} \quad (B.4)$$

$$\text{since } \phi \ll \Phi, \text{ it follows } G\Phi = -c^2 \quad (B.5)$$

[APPENDIX C] Brans-Dicke scalar field ϕ and Causality

$$\Phi = - \int_V \frac{\rho}{r} dV = - \int_0^{r_{\max}} \frac{\rho}{r} 4\pi r^2 dr \quad (C.1)$$

Considering causality, we set $r_{\max}$ as causally connected particle horizon $= a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$.

And considering expansion history, we express ρ as function of a ;

$$\rho \rightarrow \rho(a)$$

$$r \rightarrow a \chi$$

$$dr \rightarrow a d\chi$$

where comoving distance $\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$

Thus,

$$d\chi = \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{a(t)} \frac{dt}{da} da = \frac{1}{a\dot{a}} da = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{\dot{a}}{a}} da = a^{-2} H(a)^{-1} da \quad (C.2)$$

$$\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a (a')^{-2} H(a')^{-1} da' \quad (C.3)$$

Then

$$\begin{aligned} \Phi &= - \int_0^{a \int_0^t \frac{dt'}{a}} \frac{\rho(a')}{a'\chi} 4\pi a'^2 \chi^2 a d\chi \\ &= -4\pi \int_0^1 \frac{\rho(a')}{a'\chi(a')} a'^2 \chi^2(a') a' a'^{-2} H(a')^{-1} da' \\ &= 4\pi \int_0^1 \rho(a') \chi(a') H(a')^{-1} da' \end{aligned}$$